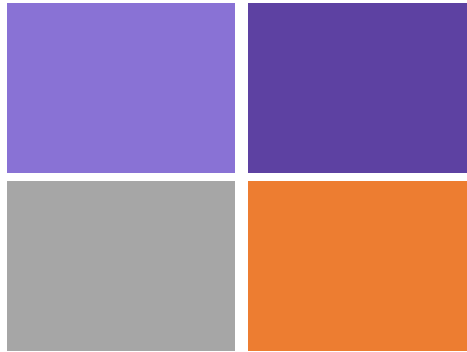


Semaine 1b1:

Intro à la Mécanique  
des Structures



MICRO-200 en 2 parties principales:

1. Mécanique des structures (semaines 1-10)
2. Conception mécanismes (semaines 11-14)

# Programme du cours

Edition 2025

Sem	Date	Matière	Cours	Exos
Danick Briand				
1	09.09	1. Intro des <b>3 enseignants</b> 2. Rappel bases statique et diagramme des forces	x	
1	11.09	Contraintes 1D	x	Série 1
2	16.09	Contraintes	x	Série 1
2	18.09	Contraintes	x	Série 2
3	23.09	Déformation	x	Série 2
3	25.09	Déformation	x	Série 3
4	30.09	Transformation	x	Série 3
4	02.10	Transformation	x	Série 4
5	07.10	Torsion	x	Série 4
5	09.10	Torsion	x	Série 5

**Exercices Série 1a de 11h15 à 13h: Salles CE 1515 + CE 1106**

# Objectifs d'apprentissage de ces slides (semaine 1b = aujourd'hui)

- Comprendre les objectifs de la mécanique des structures
- Pouvoir identifier et expliquer les hypothèses du cours
- Savoir que  $f = kx$  c'est  $\sigma = E\epsilon$  (loi de Hooke)

# Objectifs de la mécanique des structures:

---

Assurer la sécurité et le bon fonctionnement des structures tout en trouvant une solution économe et durable.

- a) Déformation maîtrisée
- b) Rigidité
- c) Fiabilité

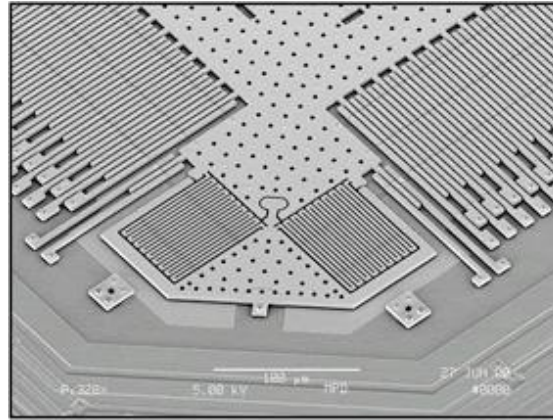


# Toute contrainte déforme le matériau: un objet indéformable n'existe pas!!

Il est essentiel pour l'ingénieur en microtechnique,  
qui recherche la précision,  
de connaître et maîtriser ces contraintes et déformations



Robot Delta  
(robot parallèle)



Analog Devices ADXL



S. Henein et al

# Objectifs de la mécanique des structures:

---

Déterminer **contraintes** et **déformations** dans les structures en fonction des charges

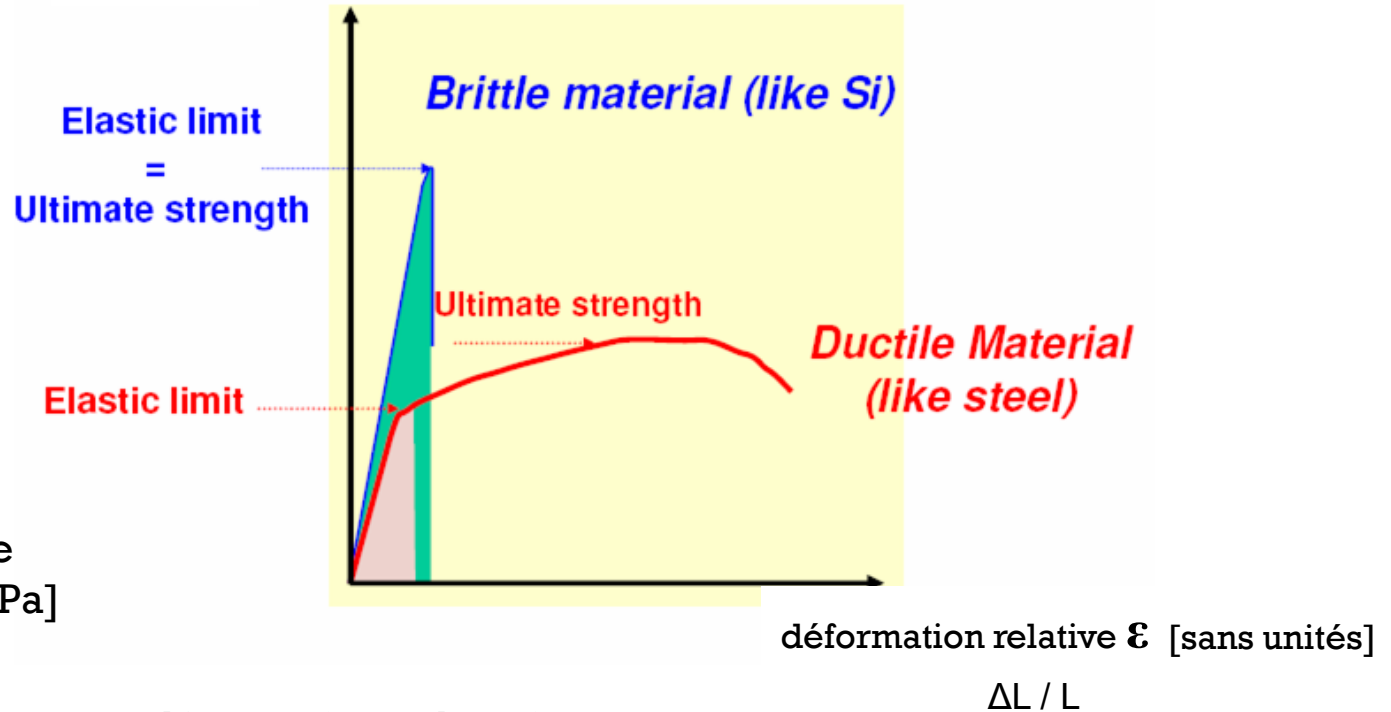
et donc concevoir l'objet de façon à maîtriser les contraintes et déformation)

1. Calculer les **forces internes** ( $\sigma$  *stress*) à partir des **forces externes**.  
équation d'équilibre ( $\sigma = N/A$ )
2. Utiliser ces contraintes internes pour calculer à une **déformation relative** ( $\varepsilon$  *strain*). équation constitutive loi de Hooke ( $\sigma = E\varepsilon$ ), mais en 3D
3. **Déterminer la déformation statique due à une charge**

# rappel: loi de Hooke

$$\sigma = E \varepsilon$$

Force/surface ( $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ )    contrainte ( $\sigma$ )

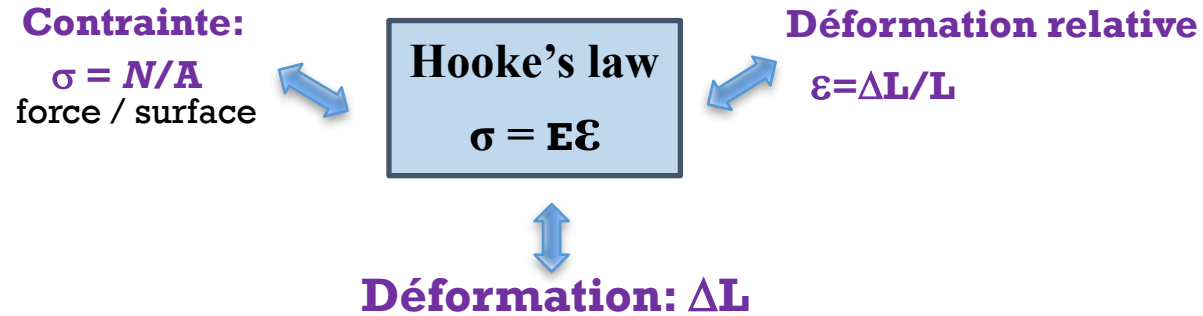


$\sigma$ : contrainte [Pa]  
 $\varepsilon$ : déformation relative  
 $E$ : module de Young [Pa]

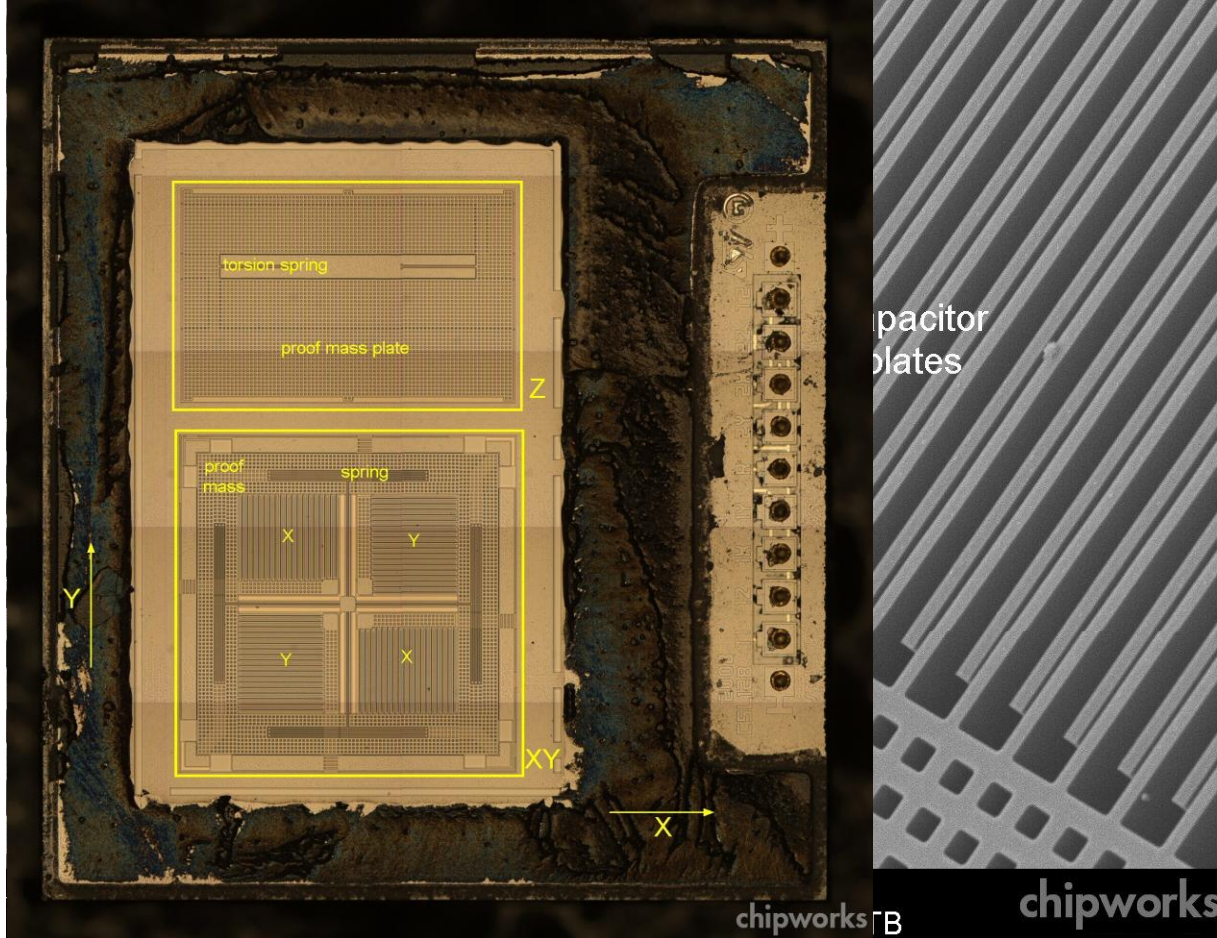
Dans ce cours, que des déformations élastiques!

# Lien: Contrainte – Déformation relative

---



# Example: Accéléromètre MEMS



Conception d'un accéléromètre en silicium.

1. Survivre à chocs de 1000 g
2. Mais mesurer accélération de 0.002 g
3. Choisir géométrie pour avoir rigidité assez faible pour mesurer faibles accélérations, tout en étant assez fiable, et avec une géométrie compatible avec les procédés de micro-usinage.

# Exemple: Montre mécanique

---

## composants résistants au chocs mécaniques



Conception pour survivre à une chute de 1 m

1. Déterminer accélération critique (1000 g)
2. Choisir géométrie ( rigidité) et matériau (module de Young) pour ne pas dépasser limite d'élasticité (calcul de forces internes)



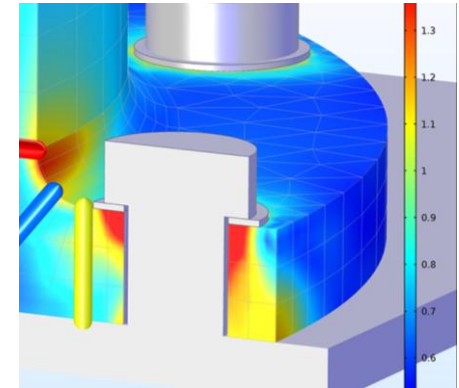
Incabloc shock absorber

# Limitations de notre approche

---

L'approche que nous montrons permet de dimensionner beaucoup d'éléments, mais:

- Pour certains systèmes plus complexes, il faudra se tourner vers le Finite Element Modelling (FEM) comme Comsol, ANSYS, etc
- Ne tient pas compte de déformation plastique, de fatigue, d'effets non-linéaires...
- Ce sera à vous de juger si les hypothèses et les simplifications sont acceptables...



# Hypothèse 1/2

---

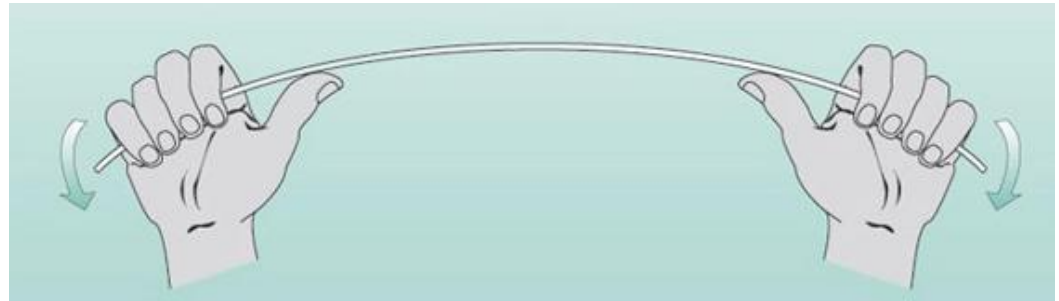
## ■ Régime élastique linéaire:

- aucune déformation plastique
- pas d'effets non-linéaires



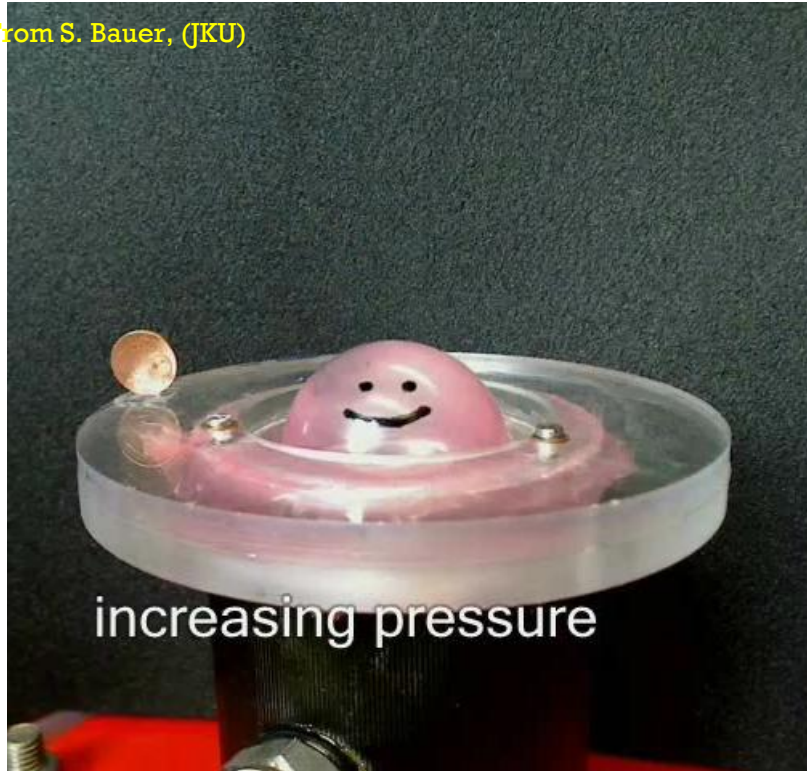
## ■ Petites déformations:

- déformations ont une influence négligeable sur la position des points d'application ou sur la direction des forces extérieures.



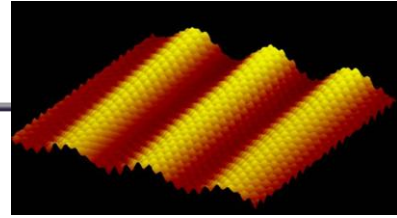
# Élastomères en régime non-linéaire

From S. Bauer, (JKU)



La grande majorité des matériaux ne subissent que de petites déformations relatives, max 1-2 % (sauf élastomères)

# Hypothèses 2/2



## ■ Continuité:

- matière continue (nous ignorons la structure à l'échelle des atomes, de molécules...)

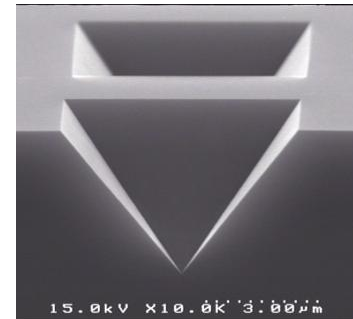
## ■ Homogénéité:

- propriétés mécaniques sont les mêmes en tout point du solide (pas de composites)



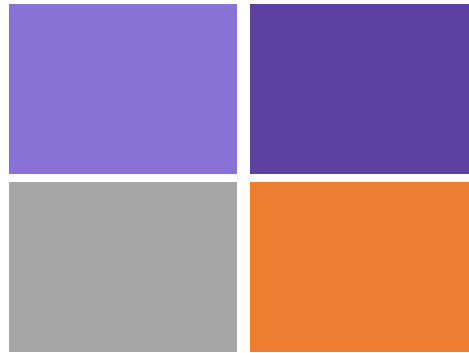
## ■ Isotropie:

- propriétés identiques dans toutes les directions



Semaine 1b2

# Contraintes en 1D



Pour le moment, forces et contraintes purement axiale

- pas de torsion (semaine 5)
- pas de flexion (semaine 6)

voir chapitre 1 de Gere et Goodno

# Objectifs d'apprentissage de ces slides sur les Contraintes en 1D

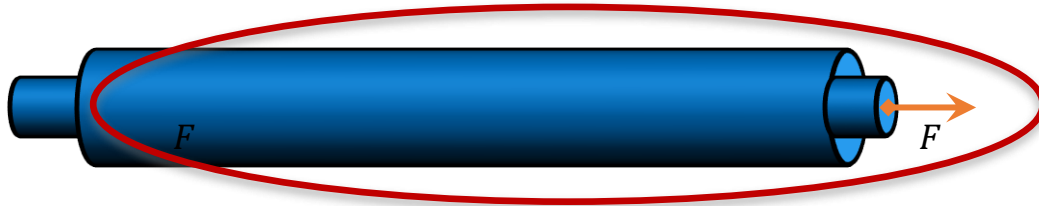
---

- Savoir dessiner les **contraintes internes** et les calculer en 1D
- Utiliser la méthode des sections
- Maitriser la Différence entre **contraintes en Traction** (positives) et en **Compression** (négatives)
- Savoir définir et calculer **Contrainte Normale** vs. **Contrainte en Cisaillement**

# Intro

---

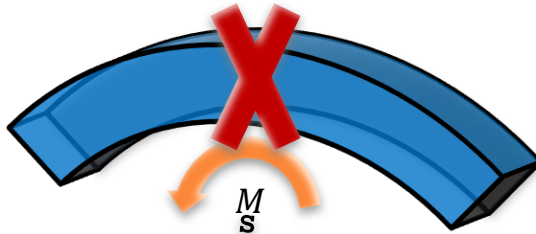
Dans ce chapitre (contraintes 1D) , nous n'étudierons que des déformations axiales (élongation)



Déformation axiale



~~Torsion (semaine 5)~~



~~Flexion (semaine 6)~~

# Vocabulaire

---

<b>Barre Prismatique:</b>	Poutre de section (arbitraire) constante sur toute sa longueur
<b>Force axiale:</b>	Une force dirigée le long de l'axe de la barre, mettant la barre en compression <i>ou</i> en traction
<b>Force de traction:</b>	Force qui étire la barre
<b>Force de Compression:</b>	Force qui comprime la barre

# Traction vs. Compression

---

Soumis à une charge axiale, une barre sera:

- soit en **traction**,
  - soit en **compression**
- Barre étirée par la force externe  $F$ : **Traction**
  - Barre comprimée par la force externe  $F$  : **Compression**

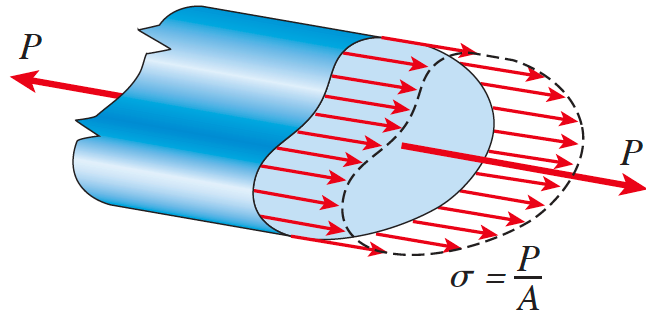


Colonnes en compression



Supports métalliques en traction

# Barre prismatique = barre à section constante



Figures de Gere and Goodno

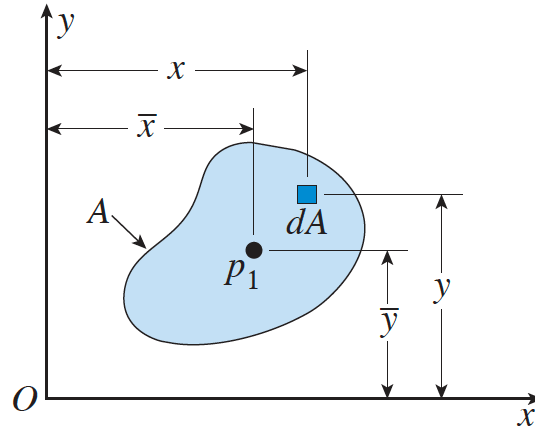
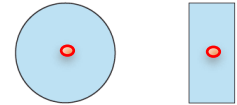
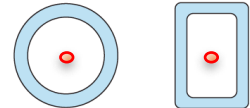


Fig. 2-4

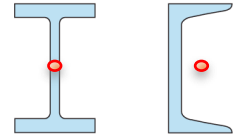
Typical cross sections  
of structural members



Solid cross sections



Hollow or tubular cross sections



Thin-walled open cross sections

Pour l'instant, nous appliquerons la force au centre  $p_1$  de la section, afin d'avoir une déformation purement axiale (sans flexion)

# Vocabulaire

---

## Forces Internes:

- Forces **dans** un objet suite à l'application de forces et/ou moments externes (par exemple une charge ou un couple).
- Physiquement: les forces (par ex liens intermoléculaires) qui font que l'objet garde sa forme

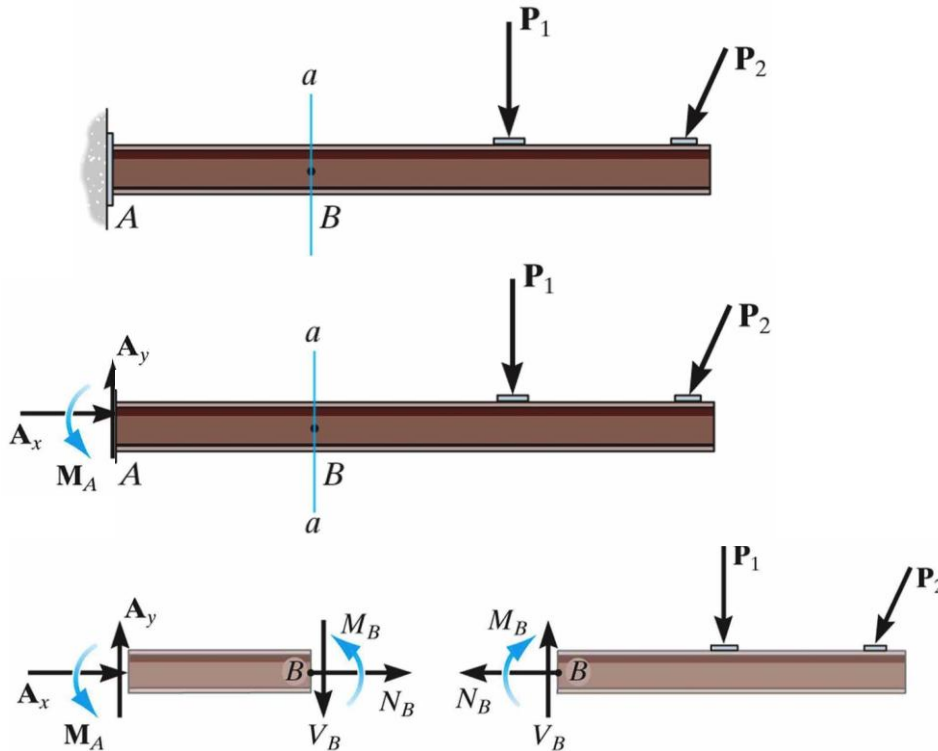
**Contrainte:** Intensité moyenne des forces internes (plus simplement, si uniforme: la force divisée par la surface)

**Contrainte Normale :** Contrainte perpendiculaire à une section

**Contrainte en Cisaillement:** Contrainte parallèle à une section

# FORCES INTERNES: méthode des sections

Quelles sont les forces internes au point B?



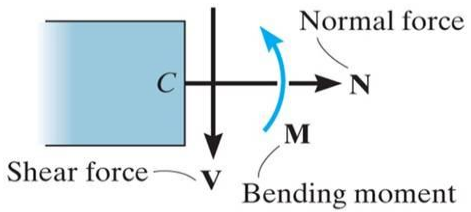
1. D'abord trouver les réactions des supports (donc diagramme des forces, mais pas encore de sous-systèmes!)

2. « couper » virtuellement la poutre au point B pour faire apparaître les forces internes

3. Dessiner diagramme des forces des sous-systèmes au point B

4. Résoudre chaque sous-sys. avec  $\Sigma F=0$ ,  $\Sigma M=0$

# FORCES INTERNES



En 2D (plan) les contraintes internes sont:

- Force de Traction (*normal force*)  $\vec{N}$
- Force de Cisaillement (*shear force*)  $\vec{V}$
- Moment de Flexion (*bending moment*)  $\vec{M}$

Force de Traction (*normal force*)  $\vec{N}$

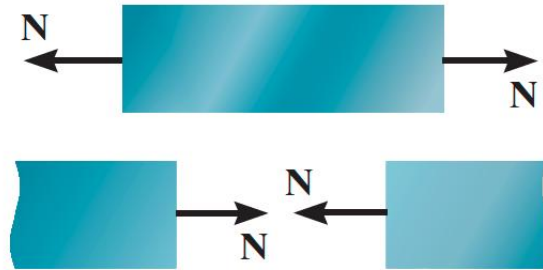


Force de Cisaillement (*shear force*)  $\vec{V}$



Moment de Flexion (*bending moment*)  $\vec{M}$



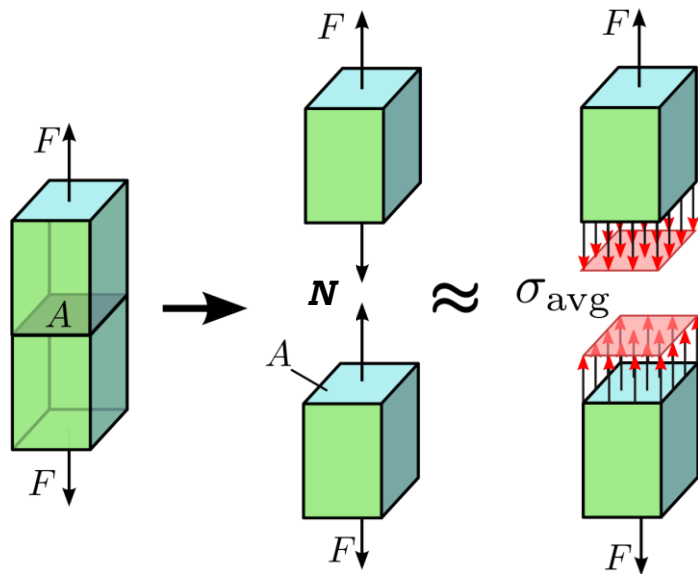


Positive normal force

### Convention de signes pour les Forces Internes axiales:

- **On dessine toujours  $N$  vers l'extérieur de la coupe**
- **La force  $N$  axiale est positive si elle met en traction, négative pour la compression**
- Si vous trouvez un scalaire négatif, c'est simplement que le vecteur est dans le sens contraire de celui que vous avez dessiné

# De forces internes à contraintes normales



$N$ : force interne  
 $\sigma$ : contrainte interne

$$\sigma = \frac{N}{A_{\perp}} \quad \text{N/m}^2 \text{ ou Pa}$$

Attention: la force  $\vec{N}$  et la section  $\vec{A}$  sont des vecteurs:  
La contrainte dépend de leur orientation.


**La contrainte tient compte de la section de la barre.**

Une force donnée n'aura pas le même effet sur des barres de section différentes.

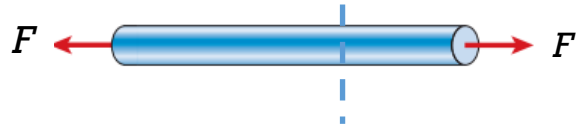
# Limitations des calculs précédents

---

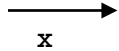
$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{N/m}^2 \text{ ou Pa}$$

- Valable seulement si la contrainte est uniformément distribuée sur la section
- Il faut donc que :
  - la force axiale  $F$  passe par le centre de masse de la section
  - Le matériau soit homogène
- Si  $F$  ne passe pas par le centre de masse, la barre peut plier, voir semaine 6 
- Sauf info contraire, les forces axiales sont appliquées aux centres des sections

# Forces Internes d'une barre soumise à une force axiale F



La force externe F mène à une force interne N



**Par convention (svp l'utiliser!):**

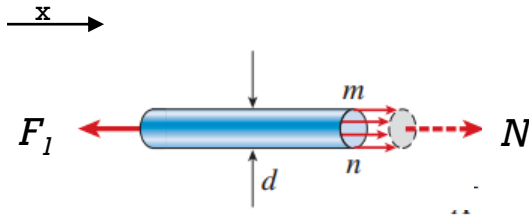
**N sort des faces externes de chaque coupe**

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ -F + N &= 0 \\ N &= F\end{aligned}$$

- des forces externes de traction génèrent une contrainte en **traction (positive)**, par convention
- des forces externes en compression génèrent une contrainte en **compression (négative)**, par convention

# Convention des signes pour la contrainte

Les forces normales “internes” doivent être dessinées comme **sortant** des faces des coupes

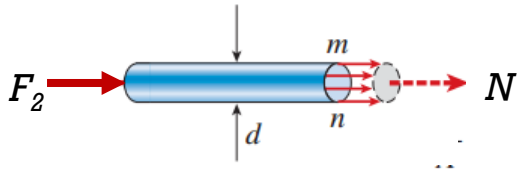


$$-F_1 + N = 0 \Rightarrow N = F_1 = 100 \text{ N}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = 100/A \text{ (Pa)}$$

$\sigma > 0$ , donc en Traction

$$F = 100 \text{ N}$$



$$F_2 + N = 0 \Rightarrow N = -F_2 = -100 \text{ N}$$

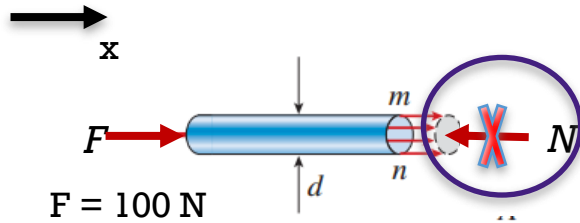
$$\sigma = \frac{N}{A} = -100/A \text{ (Pa)}$$

$\sigma < 0$ , donc en Compression

La force n'est pas nécessairement dessinée dans la direction physique (car N peut être négatif)

# Convention des signes pour contraintes

**Une mauvaise convention mènera à une interprétation erronée du résultat**



$$F - N = 0 \Rightarrow N = F = 100 \text{ N}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = 100/A \text{ (Pa)}$$

Positif -> en traction

mais devrait être négatif car en compression!

**Pour N, dessinez N qui sort de la coupe. Sans quoi, vous ne pourrez pas utiliser le signe de N pour compression / traction**

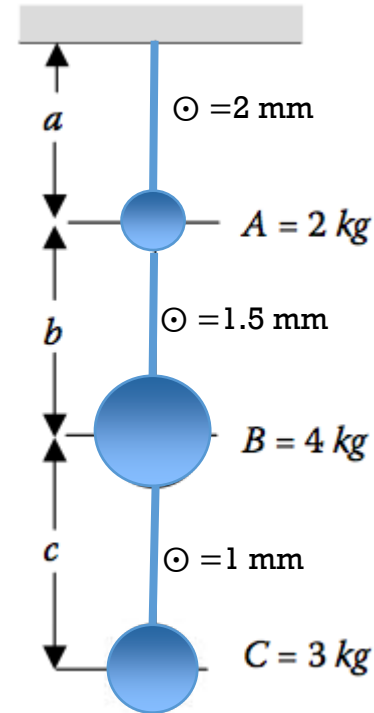
**Pour les forces de réaction, dessinez les forces dans le sens qui vous plaît (puis trouver par calcul si positif ou négatif et interpréter)**

# Exemple

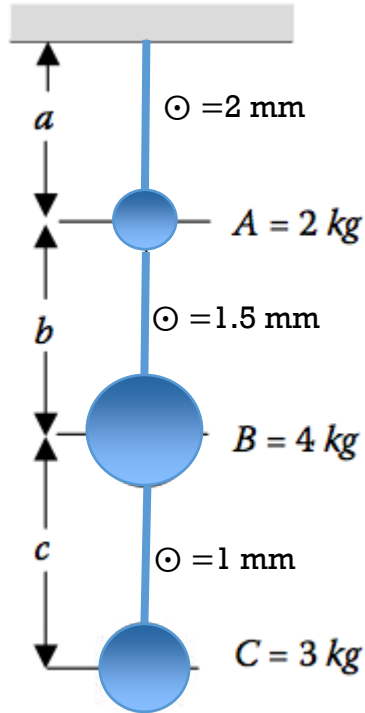
## Contrainte dans un câble

<https://tppoll.eu>  
Session: *micro200*

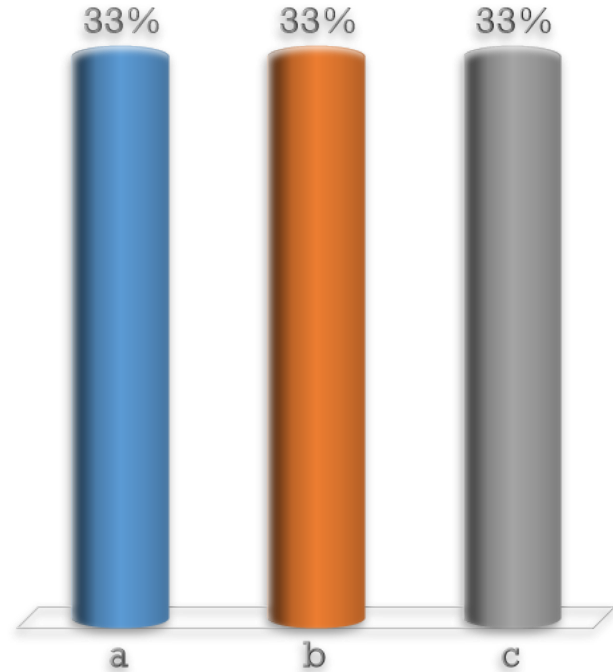
- 3 boules sont suspendues par 3 câbles de même longueur ( $a=b=c$ )
  - La masse des boules est 2 kg, 4 kg, et 3 kg (de haut en bas).
  - Le diamètre des câbles est 2 mm, 1.5 mm, et 1 mm.
- a) Dans quel câble la contrainte est-elle la plus élevée? (prendre  $g=10 \text{ ms}^{-2}$ )
- b) Dans quel ordre faudrait-il suspendre les boules pour minimiser les contraintes dans les câbles?



# Dans quel Câble a-t-on la contrainte max ?



- A. a
- B. b
- C. c



# Comment placer les balles pour minimiser la contrainte max dans les câbles? (les câbles restent 2 mm, 1.5mm, et 1 mm de diamètre)

1. A, C, B
2. B, A, C
3. B, C, A
4. C, B, A
5. C, A, B

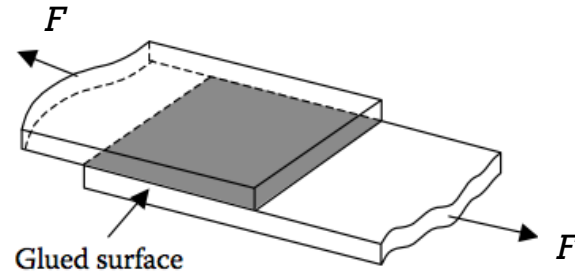


# Contraintes en cisaillement

Les contraintes en cisaillement sont parallèles à la surface sur laquelle elles agissent

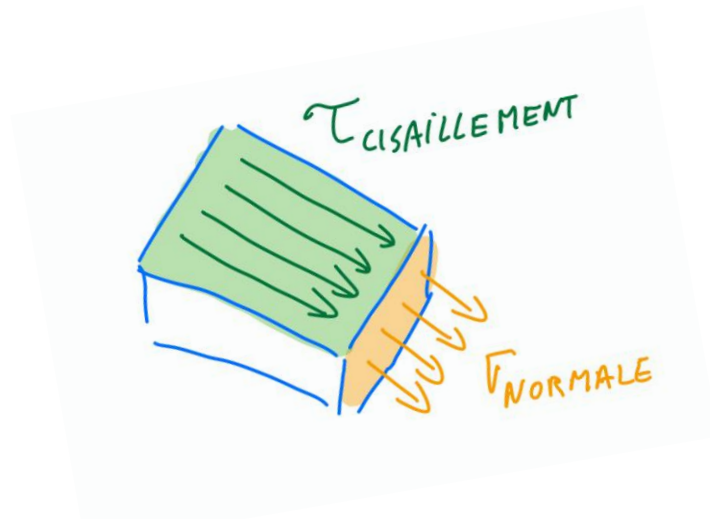
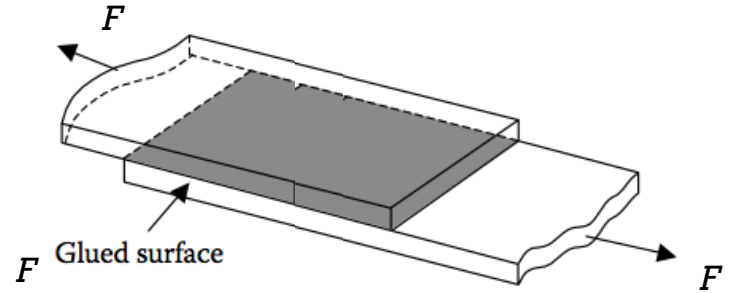
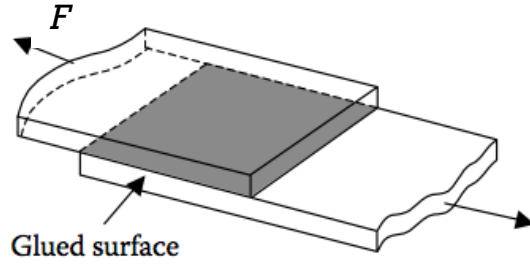
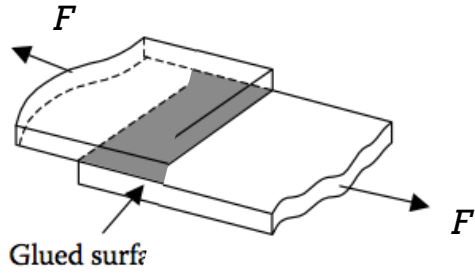
- Surface A est parallèle à la force externe  $F$  (et aussi à la force interne  $N$ )
- Contrainte en cisaillement  $\tau$  sur la surface A:

$$\tau \equiv \frac{N}{A_{\parallel}}$$

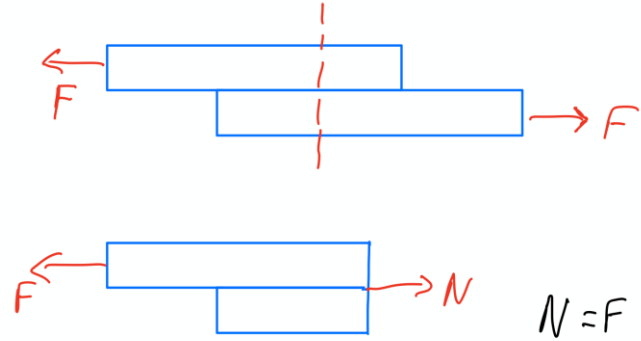
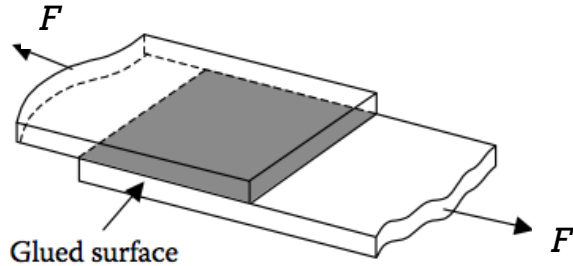


Ici, la surface  $A_{\parallel}$  est la surface en gris, collée

# Contraintes de cisaillement



# Cisaillement



Comment est-ce que ça peut casser si on tire?

- Soit le matériau se déchire car ne tient pas la **contrainte axiale**
- Soit par **cisaillement**, la colle lâche et les plaques se désolidarisent

# Contraintes 1D - résumé

## ■ Contrainte normale

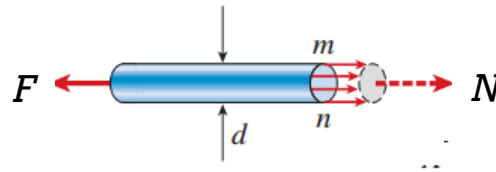
$$\sigma = \frac{N}{A_{\perp}}$$

en [N/m<sup>2</sup>] ou [Pa]

## ■ Contrainte en cisaillement

$$\tau \equiv \frac{N}{A_{\parallel}}$$

**Rappel:** les forces normales “internes” doivent être dessinées comme **sortant** des faces des coupes



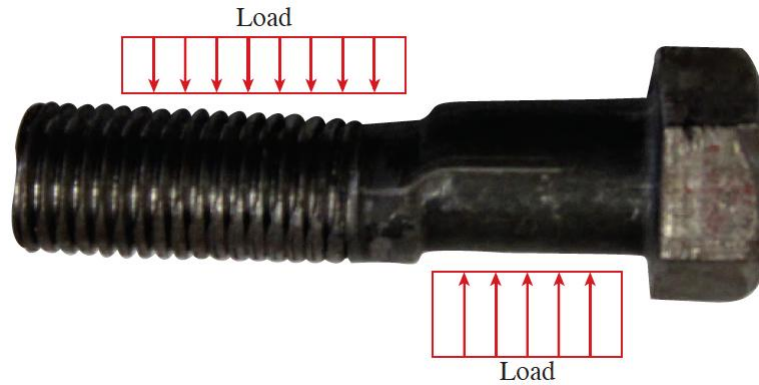
## Convention:

Traction: positif

Compression: négatif

# Contraintes en cisaillement

---



**double cisaillement du boulon**

- distribution de contraintes?
- Quelle surface  $A_{\parallel}$  ?

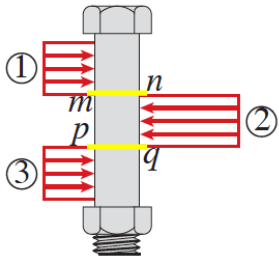
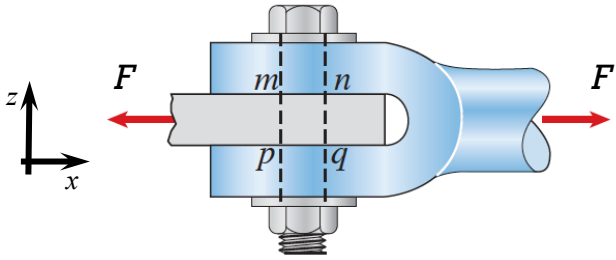
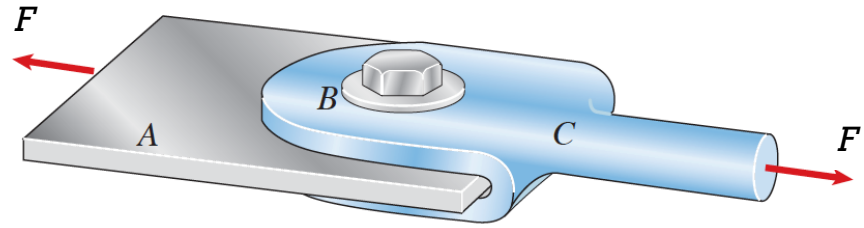
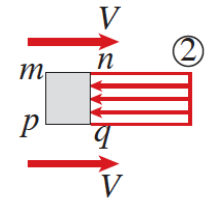
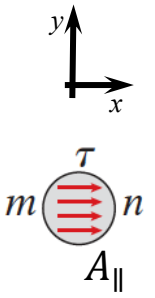


Diagramme des forces du boulon  
Vu de coté



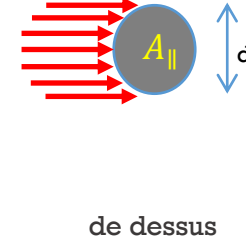
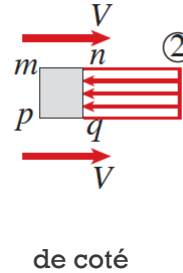
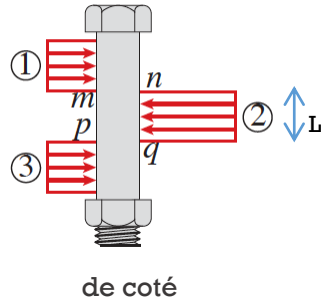
Vu de coté  
mettre en évidence les forces internes à la surface où le cisaillement a lieu

$V = F/2$



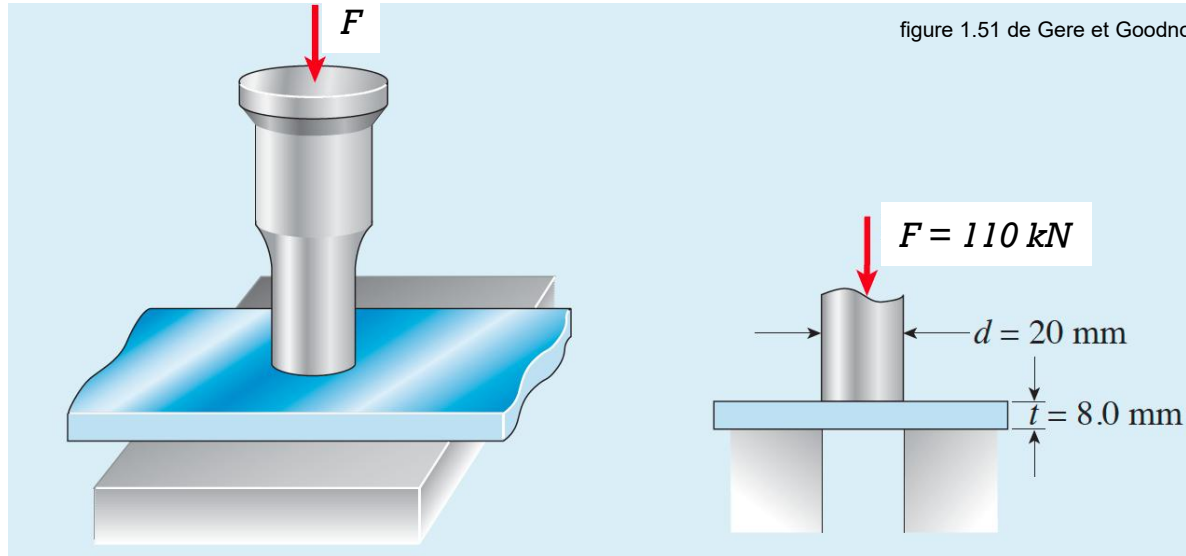
Vu de dessus  
Contraintes de cisaillement  $\tau$





- Des approximations sont nécessaires pour permettre un calcul simple
  - Nous allons négliger la concentration de contraintes, et prendre comme simplification que la *contrainte est uniformément distribuée*.
  - Les forces sont distribuées sur le boulon cylindrique: nous approximations ceci comme une force uniforme sur surface  $L \cdot d$  ( $d = \text{diamètre}$ ), en gros comme si le boulon était rectangulaire

- $$\tau = \frac{V}{A_{\parallel}} = \frac{F/2}{A_{\parallel}}$$



- calculer la contrainte normale dans la plaque bleue causé par la force  $P$  sur le poinçon
- calculer la contrainte en cisaillement dans la plaque bleue

Indice: commencer par trouver

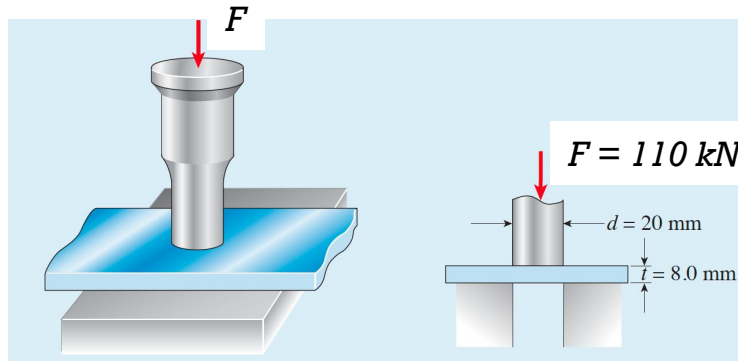
- la surface pour contrainte normale = (facile)
- la surface pour cisaillement = surface // à la force

# Quelle est la Contrainte normale et de Cisaillement?

---

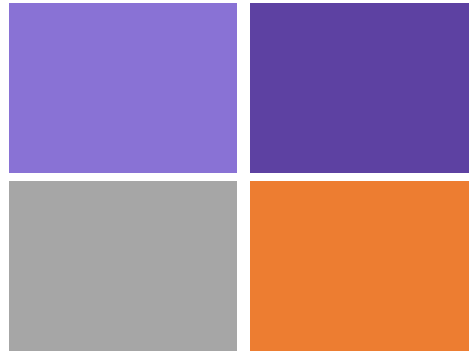
- A. Normale: 350 MPa Cisaillement: 35 MPa
- B. Normale: 219 MPa Cisaillement: 110 MPa
- C. Normale: 350 MPa Cisaillement: 219 MPa
- D. Normale: 35 MPa Cisaillement: 110 MPa

(en valeurs absolues)



Semaine 1b3

# Déformation relative en 1D



contraintes → déformation relative → déformation → changement de forme et taille

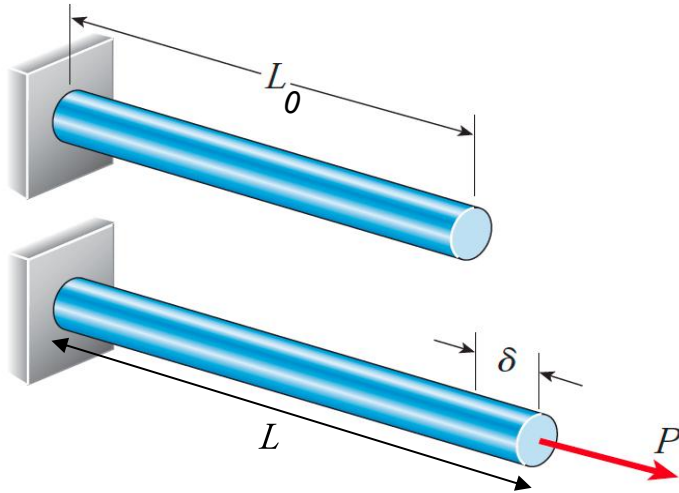
déformation → déformation relative → contraintes → forces internes

# Objectifs Déformations relatives en 1D

---

- Définition de déformation relative
- Lien entre déformation relative et déformation.
- Loi de Hooke

# Déformation relative normale (force axiale)



$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

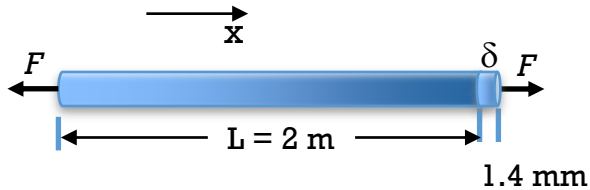
$\varepsilon > 0$  en traction  
 $\varepsilon < 0$  en compression

**$\varepsilon$  caractérise l'«intensité de la déformation»**

- sans unités
- peut être exprimée en: m/m, mm/mm, ou en %

# Exemple

Déformation relative d'une barre en acier, force de traction  $F$



- longueur initiale : 2 m    diamètre= 1 cm
- Elongation: 1.4 mm
- Module de Young :  $E= 200 \text{ GPa}$

## Déformation relative

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1.4 \text{ mm}}{2.0 \text{ m}} = 0.0007 = 700 \times 10^{-6}$$

sans unités

en pourcentage: 0.07 %

**Quelle Force** fallait-il pour obtenir ces 1.4 mm d'allongement?

- loi de Hooke.  $\sigma = E\varepsilon$     et  $N = \sigma A$ ,     $A=$  surface

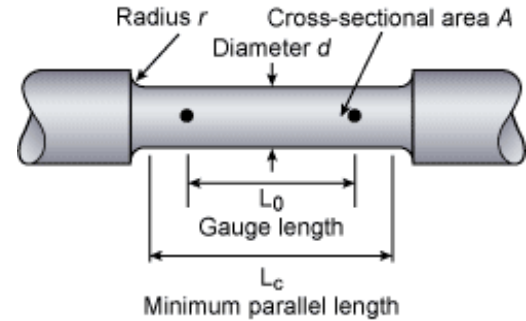
- Eq de la Statique:  $F - N = 0 \Rightarrow F = N = \sigma A = E\varepsilon A$

$F=1100 \text{ N}$

# Définitions

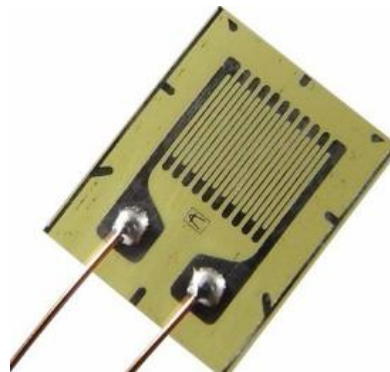
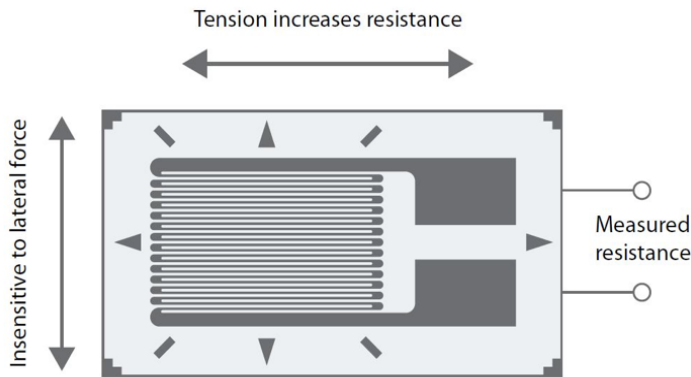
---

- **Déformation relative normale** : déformation d'un objet parallèle à la force appliquée, divisée par sa longueur initiale
- **Longueur de jauge (*gauge length*)**: longueur initiale non-déformée de l'objet
- **Forces de traction**: Forces qui étirent ou allongent l'objet (valeur positive)
- **Forces de compression** : Forces qui compriment ou raccourcissent l'objet (valeur négative)



# Jauges de déformation Métalliques «*strain gauges*»

- Piste conductive, typiquement métal mince sur un film en polymère
- Le film est **collé** sur la pièce (corps d'épreuve) qui se déforme sous l'effet d'une force externe
- Lorsque le corps d'épreuve est soumis à une force, sa déformation est reprise par film
- Ceci provoque une **variation de la résistance** de la piste métallique



- La piste est en méandre pour atteindre une résistance nominale de 300  $\Omega$  ou 1 k $\Omega$
- La jauge est sensible principalement selon la direction des longues pistes.

# Jauges de déformation (*strain gauge*)

- Facteur de jauge (*gauge factor GF*): changement relatif de la résistance suite à la déformation relative

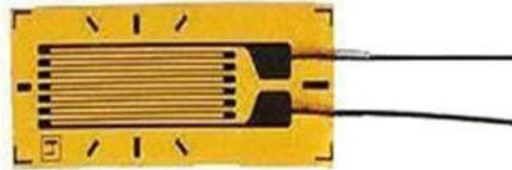
$$\frac{\Delta R}{R} = GF \cdot \varepsilon$$

$$GF = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\varepsilon} = \frac{\frac{\Delta R}{R}}{\frac{\Delta L}{L_0}}$$

- Jauges de déformation: vaste choix de matériaux:

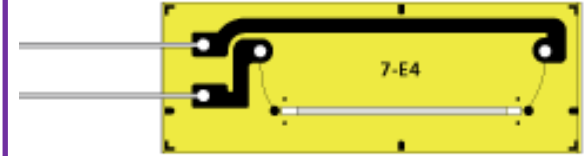
- fil métallique
- couche mince de métal
- semi-conducteurs (principalement du silicium dopé)
- ...

Film métallique GF= 2

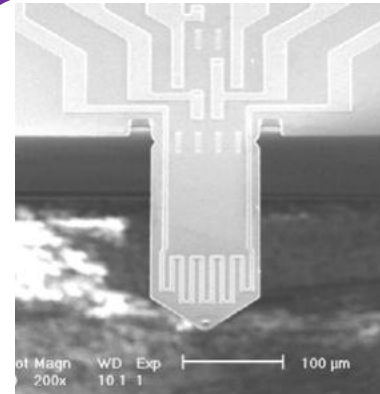


<https://www.indiamart.com/proddetail/strain-gauge-19796589188.html>

Semiconducteur GF= 100



[https://www.kyowa-ei.com/eng/product/category/strain\\_gages/ksplb/index.html](https://www.kyowa-ei.com/eng/product/category/strain_gages/ksplb/index.html)



MEMS cantilever  
with embedded  
doped Si strain  
gauges  
GF= 30

# Quelle est la résistance de la gauge ?

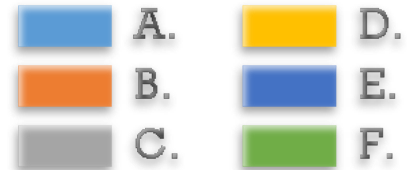
---

Une jauge de déformation de résistance initiale  $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$  avec  $GF=2$  est collée sur une barre en acier ( $E= 200 \text{ GPa}$ ) de longueur initiale  $L_0 = 10 \text{ cm}$ .

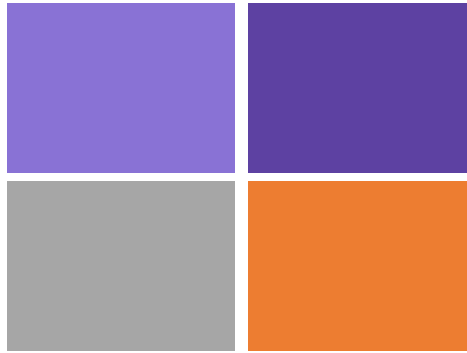
Par un vérin, on raccourci la barre de  $15 \mu\text{m}$

Quel est le changement de résistance de la gauge?

- A.  $-0.3 \Omega$
- B.  $0.3 \Omega$
- C.  $-3.0 \Omega$
- D.  $3.0 \Omega$
- E.  $15 \Omega$
- F.  $-15 \Omega$



# Loi de Hooke



# Lien en Contrainte $\sigma$ et Déformation Relative $\varepsilon$

- Relation linéaire entre Contrainte et Déformation Relative

$$\sigma \propto \varepsilon$$

Relation linéaire valide jusqu'à une valeur de  $\sigma$  ou  $\varepsilon$  au-delà duquel la relation devient non-linéaire.

- **Loi de Hooke pour contrainte normale**

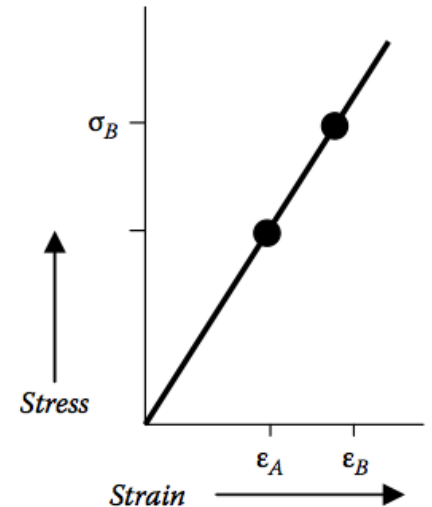
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$E$  (Pa) = "module de Young" ou "module élastique"

- **Loi de Hooke pour contrainte en cisaillement:**

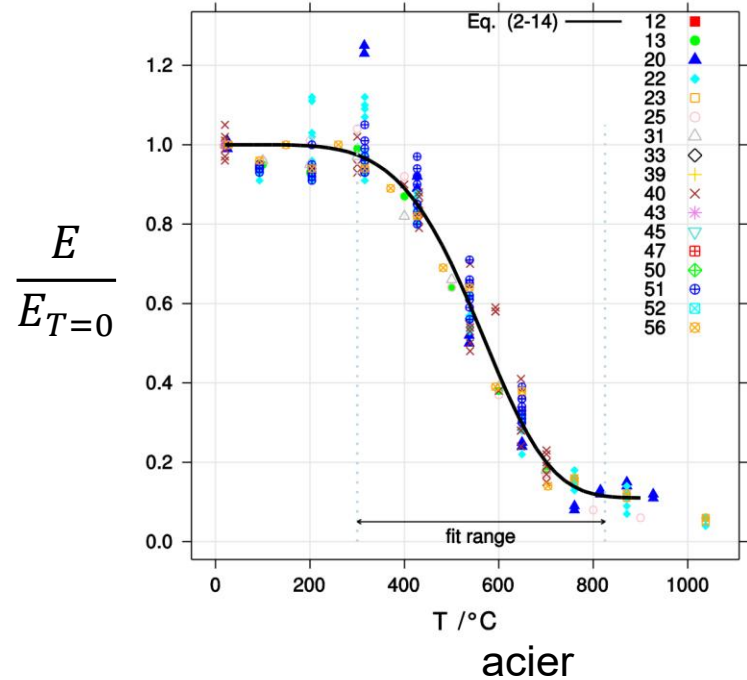
$$\tau = G \cdot \gamma$$

$G$  (Pa) = « module de cisaillement » ou "module de rigidité"



# Hypothèses pour l'expression simple de la loi de Hooke

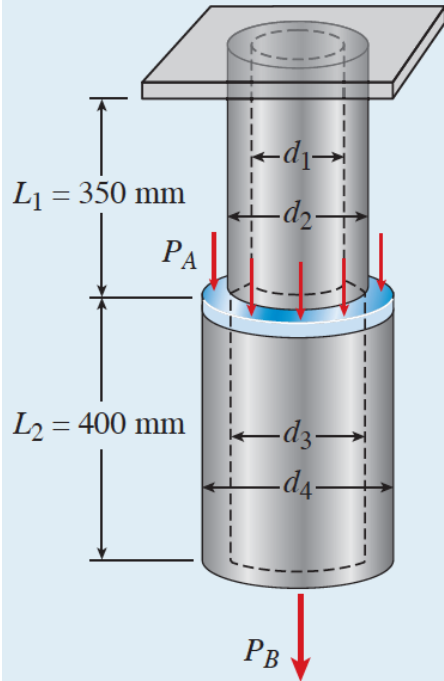
- Matériau homogène et isotrope
- Aucune dépendance de  $E$  and  $G$  sur la température



# Exemple résolu de calcul de Contrainte normale

Fig. 1-23

Example 1-5: Two-tier hanging pipe stress analysis



$$\begin{aligned}d_1 &= 51 \text{ mm} \\d_2 &= 60 \text{ mm} \\d_3 &= 57 \text{ mm} \\d_4 &= 63 \text{ mm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_A &= 7800 \text{ N} \\P_B &= ?\end{aligned}$$

Nous négligeons la masse des tuyaux

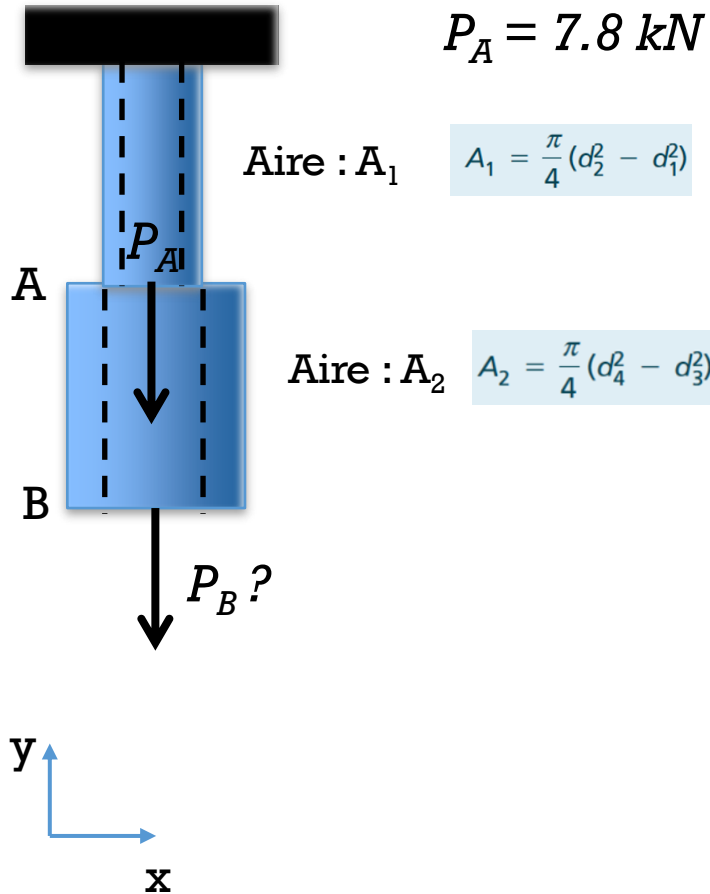
On impose deux forces  $P_A$  et  $P_B$

$$P_A = 7.8 \text{ kN}$$

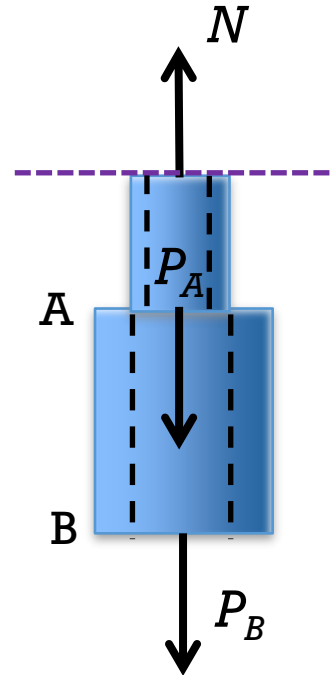
$P_B = ?$  Sera à vous de trouver

- Trouvez  $P_B$  telle que la contrainte dans le tuyau supérieur soit 14.5 MPa.
- Quelle contrainte avons-nous alors dans le tuyau du bas?
- Trouvez  $P_B$  telle que la contrainte dans les deux tuyaux soit la même
- Trouver les déformations relatives dans les deux tuyaux pour les charges du cas c) si l'allongement du tuyau supérieur est 3.56 mm, et le déplacement du bas du tuyau inférieur est 7.63 mm

## Exemple résolu de calcul de Contrainte normale



a) Trouvez  $P_B$  telle que la contrainte dans le tuyau supérieur soit 14.5 MPa.



$$\sigma_1 = \frac{N}{A_{\perp 1}}$$

$$N - P_A - P_B = 0$$

$$N = P_A + P_B$$

$$\sigma_1 = \frac{P_A + P_B}{A_1}$$

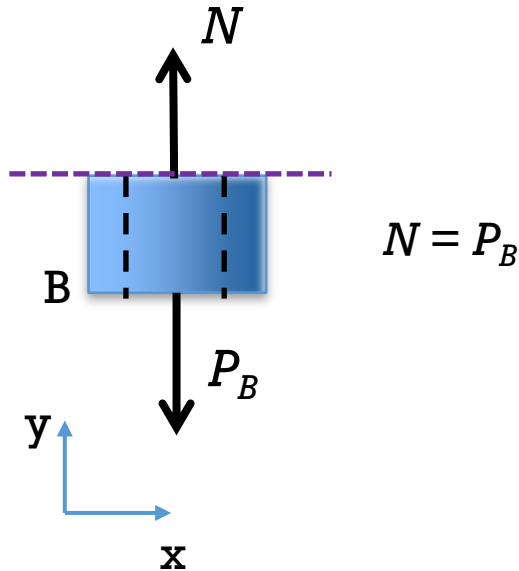
where  $\sigma_1 = 14.5 \text{ MPa}$  so  $P_B = \sigma_1 A_1 - P_A = 3577 \text{ N}$

## Exemple résolu de calcul de Contrainte normale

b) Quelle contrainte avons-nous alors dans le tuyau du bas?

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_{\perp 2}}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_B}{A_2} = 6.33 \text{ MPa}$$



c) Trouvez  $P_B$  telle que la contrainte dans les deux tuyaux soit la même

$$\sigma_1 = \sigma_2$$

$$\sigma_1 = \frac{P_A + P_B}{A_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{P_B}{A_2}$$

$$P_B = \frac{\frac{P_A}{A_1}}{\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right)} = 20,129 \text{ N}$$

## Exemple résolu de calcul de Contrainte normale

e) Trouver les déformations relatives dans les deux tuyaux pour les charges du cas c)  $\sigma_1 = \sigma_2$

si l'allongement du tuyau supérieur est 3.56 mm,

et le *déplacement* du bas du tuyau inférieur est 7.63 mm

$$\delta_1 = 3.56 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L_1} = 1.017 \times 10^{-2}$$

$$\delta = 7.63 \text{ mm}$$

$$\delta_2 = \delta - \delta_1 = 4.07 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L_2} = 1.017 \times 10^{-2}$$

Fig. 1-23

Example 1-5: Two-tier hanging pipe stress analysis

